Algebra I, 25.11. 2022

Wszystkie rozwiązania powinny być dokładnie uzasadnione

D_n oznacza grupę dihedralną rzędu $2n$.

1. Niech $\sigma = (6,13)(7,8)(2,3,11,4,12,9)(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \in S_{13}$.
   Uwaga: permutacje składamy "od prawej do lewej".
   (a) Zapisać σ^{-1} w postaci iloczynu parami rozłącznych cykli.
   (b) Określić parzystość permutacji σ.
   (c) Zbadać, czy w S_{13} istnieje permutacja parzysta rzędu 28.
2. Niech H będzie podgrupą grupy G indeksu $[G:H] = n < \infty$ i niech $a \in G$.
   Wykazać, że:
   (a) istnieje k takie, że $1 \leqslant k \leqslant n$ oraz $a^k \in H$,
   (b) jeżeli H jest podgrupą normalną, to $a^n \in H$.
3. Podaj przykład dwóch nietrywialnych homomorfizmów $f_i : D_4 \longrightarrow S_3 \times C_2, i = 1,2$, takich, że $|\ker(f_1)| \neq |\ker(f_2)|$. (W każdym przypadku należy podać obrazy wszystkich elementów grupy D_4 i uzasadnić, że otrzymane przekształcenie jest homomorfizmem.)
4. (a) Wyznacz wszystkie podgrupy indeksu 2 w grupie D_6.
   (b) Sprawdź, czy D_6 jest iloczynem prostym swoich dwóch podgrup właściwych.
5. Załóżmy, że G jest grupą skończoną, a p jest najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy G. Niech $H \trianglelefteq G$ i $|H| = p$. Udowodnij, że $H \subseteq Z(G)$.